

Теормин от Дмитрия (2024-25)

Как пользоваться этим файлом?

В данном файле собран теормин по предмету "Математическая логика и логическое программирование", который на 3-м потоке читал Владислав Васильевич Подымов в 7-м семестре в 2024-25 учебном году.

Данный файл распространяется в формате pdf, а его исходник в формате Markdown.

Автор данного файла настоятельно рекомендует читать Markdown-исходник в Obsidian (бесплатный кроссплатформенный редактор Markdown файлов). При других способах открытия, увы, возможны разные неприятные графические баги. Экспорт в pdf тоже рекомендуется делать через Obsidian.

Далее собран теормин по курсу, который писался со слайдов лектора. Перед каждым термином/теоремой в скобках указан номер слайда в сконкатенированном pdf файле со всеми лекциями.

Удачи с подготовкой!

Tг автора теормина - @dmirtyast

Теормин

1. (46) Логика предикатов. Алфавит

1. Const - множество всех констант
2. Var - множество всех переменных
3. Func — множество всех функциональных символов с сопоставленными им местностями
4. Pred — множество всех предикатных символов с сопоставленными им местностями
5. Сигнатурой алфавита логики предикатов называется тройка $\langle \text{Const}, \text{Func}, \text{Pred} \rangle$

2. (50) Логика предикатов. Синтаксис. Термы

Терм - это $t ::= x \mid c \mid f^{(n)}(t_1, t_2, \dots, t_n)$.

Term - множество всех термов (над заданными множествами Var, Const, Func)

Var_t - множество всех переменных, входящих в терм t .

Терм t основной если $\text{Var}_t = \emptyset$.

3. (52) Логика предикатов. Синтаксис. Формулы

Формула - это $\varphi ::= P^{(k)}(t_1, t_2, \dots, t_k) \mid (\varphi \& \varphi) \mid (\varphi \vee \varphi) \mid (\varphi \rightarrow \varphi) \mid (\neg \varphi) \mid (\forall x \varphi) \mid (\exists x \varphi)$.

Формула атомарна, если имеет вид $P(t_1, t_2, \dots, t_k)$, где $P^{(k)} \in \text{Pred}$ и $t_1, t_2, \dots, t_k \in \text{Term}$.

Остальные формулы называются составными.

Form - множество всех формул в алфавите с заданной сигнатурой.

4. (108) Формула $\varphi(\tilde{x}^n)$ выполнима в интерпретации $\mathcal{I}$, если существует набор предметов $\tilde{d}^n$ из области интерпретации $\mathcal{I}$, такой что $\mathcal{I} \models \varphi(\tilde{x}^n)[\tilde{d}^n]$. Формула φ выполнима ($\models \varphi$), если

существует интерпретация, в которой она выполнима.

5. (111) Интерпретация $\mathcal{I}$ является моделью для предложения φ если $\mathcal{I} \models \varphi$.

6. (113) Предложение φ называется логическим следствием множества предложений Γ ($\Gamma \models \varphi$), если любая модель Γ является моделью φ . Другими словами, если для любой интерпретации $\mathcal{I}$ верно $\mathcal{I} \models \Gamma \implies \mathcal{I} \models \varphi$.

7. (118) Теорема о логическом следствии

Для любого предложения φ и любого конечного множества предложений $\Gamma = \{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ справедливо

$$\Gamma \models \varphi \Leftrightarrow \models \psi_1 \& \psi_2 \& \dots \& \psi_n \rightarrow \varphi$$

8. (125) Существует необщезначимое предложение, истинное в любой интерпретации с конечной предметной областью.

$$\forall x \neg R(x, x) \& \forall x \forall y \forall z (R(x, y) \& R(y, z) \rightarrow R(x, z)) \rightarrow \exists x \forall y \neg R(x, y)$$

Другими словами если отношение R антирефлексивно и транзитивно, то существует предмет, максимальный относительно R . (Следствие леммы Цорна)

9. (132) Семантическая таблица $T = \langle \Gamma | \Delta \rangle$ закрыта, если $\Gamma \cap \Delta \neq \emptyset$.

10. (132) Семантическая таблица $T = \langle \Gamma | \Delta \rangle$ атомарна, если все формулы из $\Gamma \cup \Delta$ атомарны.

11. (133) Семантическая таблица $T = \langle \Gamma | \Delta \rangle$ выполнима, если существуют интерпретация $\mathcal{I}$ и набор предметов $\tilde{d}^n$, такие что $\forall \varphi \in \Gamma \mathcal{I} \models \varphi(\tilde{x}^n)[\tilde{d}^n]$ и $\forall \psi \in \Delta \mathcal{I} \not\models \psi(\tilde{x}^n)[\tilde{d}^n]$. (Прим.: т.е. в семантической таблице нет противоречий)

12. (135) Теорема о табличной проверке общезначимости. Для любой формулы φ справедливо $\models \varphi$ тогда и только тогда, когда таблица $\langle | \varphi \rangle$ невыполнима.

13. (135) Любая закрытая таблица невыполнима.

14. (135) Любая незакрытая атомарная таблица выполнима.

15. (143) Утверждение о правильной подстановке. Для любой формулы $\varphi(\tilde{x}^n, x)$, интерпретации $\mathcal{I}$, набора предметов $\tilde{d}^n$ и подстановки $\{x/t(\tilde{x}^n)\}$, правильной для φ , верно:

$$\mathcal{I} \models \varphi[\tilde{d}^n, t[\tilde{d}^n]] \Leftrightarrow \mathcal{I} \models \varphi\{x/t\}[\tilde{d}^n]$$

16. (154) Табличный вывод успешен, если он конечен и всем его листьям приписаны закрытые таблицы.

17. (161) Лемма о корректности правил табличного вывода.

Для любого правила табличного вывода $\frac{T_0}{T_1(T_2)}$ таблица T_0 выполнима тогда и только тогда, когда выполнима таблица T_1 (или выполнима таблица T_2).

18. (166) Теорема о корректности табличного вывода. Если для семантической таблицы T существует успешный табличный вывод, то таблица T невыполнима.

19. (169) Теорема о полноте табличного вывода. Для любой невыполнимой семантической таблицы существует успешный табличный вывод.

20. (180) Следствие 1. Семантическая таблица T логики предикатов невыполнима $\Leftrightarrow$ для неё существует успешный табличный вывод. (Прим.: это следствие из теорем о корректности и полноте табличного вывода)

21. (180) Следствие 2. Для любой формулы φ логики предикатов верно: $\models \varphi \Leftrightarrow$ для семантической таблицы $\langle |\varphi\rangle$ существует успешный табличный вывод. (Прим.: это следствие из первого следствия и теоремы о табличной проверке общезначимости формул)
22. (184) Теорема Лёвенгейма-Сколема. Для любого предложения φ справедлива равносильность: φ выполнимо $\Leftrightarrow \varphi$ имеет модель с не более чем счётной предметной областью.
23. (186) Теорема компактности Мальцева. Для любого предложения φ и любого множества предложений Γ справедлива равносильность: $\Gamma \models \varphi \Leftrightarrow$ существует конечное подмножество Γ' множества Γ , такое что $\Gamma' \models \varphi$.
24. (187) Множество предложений Γ называется выполнимым ($\models \Gamma$), если у этого множества есть хотя бы одна модель.
25. (187) Следствие из теоремы о компактности Мальцева. Для любого множества предложений Γ верно: $\not\models \Gamma \Leftrightarrow$ существует конечное подмножество Γ' множества Γ , такое что $\not\models \Gamma'$.
26. (201) Метод резолюции.
 1. Исходная формула (φ)
 2. Отрицание ($\psi = \neg\varphi$)
 3. ПНФ (ψ_{pnf})
 4. ССФ (ψ_{ssf})
 5. Система дизъюнктов ($S_{\psi_{ssf}}$)
 6. Резолютивный вывод пустого дизъюнкта из $S_{\psi_{ssf}}$
27. (204) Эквивалентность $\varphi \leftrightarrow \psi$ - это сокращение для формулы $(\varphi \rightarrow \psi) \& (\psi \rightarrow \varphi)$
28. (204) Формулы φ и ψ равносильны, если формула $\varphi \leftrightarrow \psi$ общезначима.
29. (205) Утверждение. Если формула φ общезначима (выполнима), то любая равносильная ей формула ψ также общезначима (выполнима)
30. (208) Теорема о равносильной замене. Для любых формул φ, ψ, χ логики предикатов верно: $\psi \sim \chi \implies \varphi[[\psi]] \sim \varphi[[\psi/\chi]]$. Прим.: $\varphi[[\psi]]$ - обозначение, что формула φ содержит подформулу ψ , а $\varphi[[\psi/\chi]]$ - замена в формуле φ подформулы ψ на χ .
31. (217-221) Перевод в ПНФ (предваренную нормальную форму).
 1. Переименование переменных
 2. Удаление импликаций
 3. Продвижение отрицаний
 4. Вынесение кванторов
 5. Получение КНФ
32. (227) Лемма об удалении квантора существования. Пусть $\varphi = \forall \tilde{x}^n \exists x_{n+1} \chi$ - замкнутая формула ЛП (логики предикатов) и функциональный символ f не содержится в χ . Тогда $\models \varphi \Leftrightarrow \models \forall \tilde{x}^n (\chi\{x_{n+1}/f(\tilde{x}^n)\})$.
33. (239) Теорема о переходе к дизъюнктам. Для ССФ с любым набором множителей $D_1, \dots, D_k$ верно: $\models \forall \tilde{x}^n (D_1 \& \dots \& D_k) \Leftrightarrow \models \{\forall \tilde{x}^n D_1, \dots, \forall \tilde{x}^n D_k\}$.

34. (250) Подстановка θ называется унификатором выражений E_1, E_2 , если $E_1\theta = E_2\theta$.
35. (250) $Y(E_1, E_2)$ (в лекциях $Y(E_1, E_2)$) - множество всех унификаторов E_1, E_2 . Выражения E_1, E_2 унифицируемы, если $Y(E_1, E_2) \neq \emptyset$.
36. (250) Утверждение. Для любых подстановок θ, η и любых выражений E_1, E_2 верно: если $\theta \in Y(E_1, E_2)$, то $\theta\eta \in Y(E_1, E_2)$.
37. (250) Подмножество S множества подстановок Θ называется полным в Θ , если для любой подстановки $\theta \in \Theta$ существуют $\eta \in S$ и $\mu \in \text{Subst}$, такие что $\theta = \eta\mu$, где Subst - множество всех конечных подстановок.
38. (250) Подстановка θ называется наиболее общим унификатором выражений, если множество $\{\theta\}$ является полным в $Y(E_1, E_2)$. $\text{НОУ}(E_1, E_2)$ - множество наиболее общих унификаторов E_1, E_2 .
39. (272) Теорема об унификации. Для любой системы уравнений $\mathcal{E}$ алгоритм унификации $\mathfrak{U}$:
1. Завершает работу на $\mathcal{E}$ (завершаемость)
 2. По завершении алгоритмом выдаётся подстановка или сообщение СТОП (успешность)
 3. Если выдана подстановка θ , то $\theta \in \text{НОУ}(\mathcal{E})$ (корректность)
 4. Если выдано сообщение СТОП, то система $\mathcal{E}$ не унифицируема (полнота)
40. (272) Следствие. Для любых атомов A и B логики предикатов верно:
 $Y(A, B) \neq \emptyset \Leftrightarrow \text{НОУ}(A, B) \neq \emptyset$.
41. (284) Монотонность следования в ЛП. Для любых множеств предложений Γ, Δ и любого предложения φ верно

$$\Gamma \models \varphi \implies \Gamma \cup \Delta \models \varphi$$

42. (285) Монотонность " $\vee$ " относительно следования в ЛП. Для любого множества предложений Γ и любых предложений $\varphi(\tilde{x}^n), \psi(\tilde{x}^n)$ верно

$$\Gamma \models \forall \tilde{x}^n \varphi \implies \Gamma \models \forall \tilde{x}^n (\varphi \vee \psi)$$

43. (286) Транзитивность следования в ЛП. Для любого множества предложений Γ и любых предложений $\psi_1, \dots, \psi_n, \varphi$ верно

$$\begin{cases} \Gamma \models \psi_1 \\ \dots \\ \Gamma \models \psi_n \\ \psi_1, \dots, \psi_n \models \varphi \end{cases} \implies \Gamma \models \varphi$$

44. (292) Правило резолюции.

$$\frac{D_1 \vee L_1, D_2 \vee \neg L_2}{(D_1 \vee D_2)\theta}$$

, где D_1, D_2 - дизъюнкты, L_1, L_2 - положительные литеры, $\theta \in \text{НОУ}(L_1, L_2)$. $(D_1 \vee D_2)\theta$ называется резольвентой дизъюнктов $D_1 \vee L_1, D_2 \vee \neg L_2$.

45. (297) Лемма о корректности правила резолюции. Если D - резольвента дизъюнктов D_1, D_2 , то $D_1, D_2 \models D$.

46. (299) Правило склейки.

$$\frac{D \vee L_1 \vee L_2}{(D \vee L_1)\theta}$$

, где D - дизъюнкт, L_1, L_2 - литеры, $\theta \in \text{НОУ}(L_1, L_2)$.

47. (300) Лемма о корректности правила склейки. Если D - склейка дизъюнкта D_1 , то $D_1 \models D$.

48. (306) Теорема о корректности резолютивного вывода. Если из системы дизъюнктов S резолютивно выводим пустой дизъюнкт $\square$, то система S невыполнима.

49. (316) Эрбрановские интерпретации - это интерпретация $\langle \mathcal{H}_\sigma, \overline{Const}_\mathcal{H}, \overline{Func}_\mathcal{H}, \overline{Pred} \rangle$, где:

- $\mathcal{H}_\sigma$ - эрбрановский универсум: это множество всех основных термов сигнатуры
 - σ , если $Const \neq \emptyset$
 - $\langle \{c_\mathcal{H}, Func, Pred\} \rangle$, если $Const = \emptyset$, где $c_\mathcal{H}$ - эрбрановская константа
- $\overline{Const}_\mathcal{H}(c) = c$ для любой константы c из $Const$
- $\overline{Func}_\mathcal{H}(f)(t_1, \dots, t_n) = f(t_1, \dots, t_n)$ для любых $f^{(n)} \in Func$ и $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{H}_\sigma$
- $\overline{Pred}$ - произвольная оценка предикатных символов

50. (317) Эрбрановский базис ($B_\mathcal{H}$) - это множество всех атомов, построенных над термами $\mathcal{H}$ -универсума. $\mathcal{H}$ -интерпретация $\mathcal{I}$ всегда и однозначно определяется тем, какие атомы из $B_\mathcal{H}$ в ней истинны и какие нет, то есть множеством $B^\mathcal{I} = \{A \mid A \in B_\mathcal{H}, \mathcal{I} \models A\}$.

51. (318) Теорема об эрбрановских интерпретациях. Система дизъюнктов выполнима тогда и только тогда, когда она имеет эрбрановскую модель.

52. (325) Теорема Эрбрана. Система дизъюнктов невыполнима $\Leftrightarrow$ существует конечное невыполнимое множество основных примеров дизъюнктов этой системы.

53. (328) Лемма об основных дизъюнктах. Из любой конечной невыполнимой системы основных дизъюнктов резолютивно выводим пустой дизъюнкт.

54. (333) Лемма о подъёме для правила резолюции. Пусть D_1, D_2 - дизъюнкты, и $\text{Var}_{D_1} \cap \text{Var}_{D_2} = \emptyset$. D'_1, D'_2 - основные примеры дизъюнктов D_1, D_2 соответственно. D' - резольвента D'_1, D'_2 . Тогда существует резольвента D дизъюнктов D_1, D_2 , примером которой является D' .

55. (342) Лемма о подъёме для правила склейки. Пусть D_1, D'_1 - дизъюнкт и его основной пример. D' - склейка дизъюнкта D'_1 . Тогда существует склейка D дизъюнкта D_1 , примером которой является D' .

56. (343) Теорема о полноте резолютивного вывода. Из любой невыполнимой системы дизъюнктов резолютивно выводим пустой дизъюнкт.

57. (354) Теорема о полноте семантической резолюции. $\mathcal{I}$ -резолюция полна для любой интерпретации $\mathcal{I}$. Иными словами, для любой невыполнимой системы дизъюнктов S и любой интерпретации $\mathcal{I}$ существует $\mathcal{I}$ -резолютивный вывод $\square$ из S .

58. (357) Теорема о неполноте входной резолюции. Входная резолюция неполна.

59. (368) Хорновские дизъюнкты.

D-правилем будем называть дизъюнкт, содержащий ровно одну положительную литеру, то есть имеющий вид $\neg A_1 \vee \dots \vee \neg A_n \vee B$.

D-запросом будем называть дизъюнкт, не содержащий ни одной положительной литеры (в

том числе $\square$), то есть имеющий вид $\neg A_1 \vee \dots \neg A_k$.

Хорновскими дизъюнктами называются D-правила и D-запросы.

Утверждение. $\neg A_1 \vee \dots \neg A_n \vee B \sim A_1 \& \dots \& A_n \rightarrow B$.

Утверждение. $\neg A_1 \vee \dots \neg A_n \sim \neg(A_1 \& \dots \& A_n)$.

60. (373) Теорема о входной резолюции как средстве вычисления.

Пусть

S - система D-правил,

Q_1 - D-запрос,

$Q_1, R_1, Q_2, R_2, \dots, Q_k, R_k, \square, k \geq 0$ - успешный входной резолютивный вывод из $S \cup \{Q_1\}$,

$\theta_1, \dots, \theta_k$ - наиболее общие унификаторы, согласно которым в выводе строятся

резольвенты $Q_2, \dots, Q_k, \square$ соответственно.

Тогда $S \models ((\neg Q_1)\theta_1 \dots \theta_k)^\forall$. Прим.: $\varphi^\forall = \forall \tilde{x}^n$, где $\{x_1, \dots, x_n\} = \text{Var}_\varphi$.

61. (386-389) Хорновские логические программы (ХЛП). Синтаксис

ХЛП сигнатуры σ логики предикатов - это конечная последовательность программных утверждений, каждое из которых представляет собой факт или правило.

Факт имеет вид $A;$, где A - атом логики предикатов.

Правило имеет вид $A \leftarrow B_1, \dots, B_k;$, где $k \geq 1$, A - заголовок: атом логики предикатов,

$B_1, \dots, B_k$ — тело: последовательность атомов логики предикатов, разделённых запятой.

Запрос к ХЛП (оно же целевое утверждение, или цель) имеет вид $?C_1, \dots, C_k$, где $k \geq 0$ (для случая $k = 0$ запрос принято записывать $\square$), $C_1, \dots, C_k$ - тело.

62. (410) SLD-резольвента.

Пусть

- $\mathcal{Q} = ?C_1, \dots, C_{i-1}, C_i, C_{i+1}, \dots, C_m$ - запрос
- $\mathcal{R} = A \leftarrow B_1, \dots, B_k$ - правило
- $\mathcal{R}' = \mathcal{R}\eta$ - вариант правила $\mathcal{R}$ для переименования η , не содержащий ни одной переменной из $\mathcal{Q}$
- $\theta \in \text{НОУ}(C_i, A\eta)$

Тогда запрос $\mathcal{Q}' = (?C_1, \dots, C_{i-1}, B_1\eta, \dots, B_k\eta, C_{i+1}, \dots, C_m)$ называется SLD-резольвентой запроса $\mathcal{Q}$ и правила $\mathcal{R}$ для подцели C_i и унификатора θ .

63. (421) Лемма о соответствии вычислений и входных выводов.

Для любого конечного SLD-резолютивного вычисления

$$\mathcal{Q}_1 \xrightarrow{\mathcal{R}_1, k_1, \theta_1} \mathcal{Q}_2 \xrightarrow{\mathcal{R}_2, k_2, \theta_2} \dots \xrightarrow{\mathcal{R}_{n-1}, k_{n-1}, \theta_{n-1}} \mathcal{Q}_n$$

программы $\mathcal{P}$ последовательность дизъюнктов $\neg\Phi_{\mathcal{Q}_1}, \Phi_{\mathcal{R}_1}, \dots, \Phi_{\mathcal{R}_{n-1}}, \neg\Phi_{\mathcal{Q}_n}$ является входным резолютивным выводом из $S_{\mathcal{P}} \cup \{\neg\Phi_{\mathcal{Q}_1}\}$ в котором для вычисления резольвент $\mathcal{Q}_2, \dots, \mathcal{Q}_n$ применяются соответственно унификаторы $\theta_1, \dots, \theta_{n-1}$.

64. (423) Теорема о корректности операционной семантики ХЛП. Для любой ХЛП $\mathcal{P}$ и любого запроса $\mathcal{Q}$ верно следующее: любой SLD-вычислимый ответ на $\mathcal{Q}$ к $\mathcal{P}$ является правильным ответом на $\mathcal{Q}$ к $\mathcal{P}$.

65. (429) Лемма об основных вычислениях. Для любой ХЛП $\mathcal{P}$ и любого основного запроса $\mathcal{Q}$, такого что $S_{\mathcal{P}} \models \Phi_{\mathcal{Q}}$, существует успешное SLD-резолютивное вычисление, порождённое

запросом Q к $[P]$. Прим.: $[P]$ обозначим бесконечную ХЛП, состоящую из всех основных примеров всех правил ХЛП P в произвольном порядке.

66. (434) Лемма о подъёме вычисления. Для любых ХЛП P , ответа к ней θ и запроса Q , таких что $Q\theta$ - основной запрос, верно: если для $[P]$ существует успешное SLD-резольтивное вычисление, порождённое запросом $Q\theta$, то для P существует успешное SLD-резольтивное вычисление, порождённое запросом Q , результат которого - это обобщение подстановки θ .
67. (436) Теорема о полноте операционной семантики ХЛП. Для любой ХЛП P и запроса Q любой правильный ответ на запрос Q к P является частным случаем хотя бы одного SLD-вычислимого ответа на запрос Q к P .
68. (445) Переключательная лемма.
69. (449) Теорема о сильной полноте операционной семантики ХЛП. Для любого правила выбора подцели $\mathfrak{A}$ и любого правильного ответа θ существует $\mathfrak{A}$ -вычисляемый ответ, являющийся обобщением θ .
70. (480-483) Машина Тьюринга. Синтаксис. Семантика
Алфавит - это непустое конечное множество символов.
Машина Тьюринга - это система $(\mathfrak{A}, \Lambda, Q, q_0, q_f, \pi)$.
 - $\mathfrak{A}$ - алфавит ленты
 - $\Lambda \in \mathfrak{A}$ - пустой символ
 - Q - алфавит состояний
 - $q_0, q_f \in Q$ - начальное и конечное состояние
 - $\pi : (Q \setminus \{q_f\}) \times \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A} \times \{L, R\} \times Q$. Пример: команда состояния q_0 заменяющая a на b , сдвиг влево и переход в состояние q_1 (q_0, a, b, L, q_1) $\Leftrightarrow \pi(q_0, a) = (b, L, q_1)$.
Конфигурация машины Тьюринга - это набор (α, q, β) , где $\alpha, \beta \in \mathfrak{A}^+$ и $q \in Q$.
 $\rightarrow_C$ - преобразование конфигурации командой C .
 $\rightarrow_M$ - объединение отношений $\rightarrow_C$ по всем командам C машины Тьюринга M .
71. (496) Теорема о моделировании машин Тьюринга хорновскими ЛП. Для любых МТ M и конфигурации σ последовательность запросов $?p(\tau_\sigma), ?p(t_1), ?p(t_2), \dots$ является вычислением ХЛП P_M тогда и только тогда, когда существуют конфигурации $\sigma_1, \sigma_2, \dots$, такие что $t_1 = \tau_{\sigma_1}, t_2 = \tau_{\sigma_2}, \dots$ и $\sigma \rightarrow_M \sigma_1 \rightarrow_M \sigma_2 \rightarrow_M \dots$.
72. (496) Вычисление ХЛП назовём непродолжаемым, если оно успешное, тупиковое или бесконечное.
73. (496) Следствие из тео. о моделировании МТ ХЛП. Для любой МТ M и любой её конфигурации σ существует ровно одно непродолжаемое вычисление программы P_M на $?p(\tau_\sigma)$.
74. (498) P_M^1 - ХЛП получающаяся из P_M добавлением факта $p(X. q_f. Y. nil)$;
75. (498) Следствие. Для любой МТ $M = (\mathfrak{A}, \Lambda, Q, q_0, q_f, \pi)$ и любого ленточного слова w верно: вычисление M на w конечно $\Leftrightarrow ?p(\tau_{(\Lambda, q_0, w\Lambda)}) \rightarrow_{P^1}^* \square$.
76. (498) Следствие. Для любой МТ $M = (\mathfrak{A}, \Lambda, Q, q_0, q_f, \pi)$ и любого ленточного слова w верно: вычисление M на w конечно $\Leftrightarrow ?p(\tau_{(\Lambda, q_0, w\Lambda)}) \rightarrow_{P^1}^* \square$.
77. (499) P_M^2 - ХЛП получающаяся из P_M^1 добавлением в предикат $p(_, Z)$ второго аргумента, который нигде не изменятся, кроме последнего правила: $p(X. q_f. Y. nil, X. q_f. Y. nil)$;

78. (505) Массовая задача $\mathfrak{T} : \mathfrak{I} \rightarrow \mathfrak{D}$ это отображение множества всевозможных входных данных $\mathfrak{I}$ в множество всевозможных выходных данных $\mathfrak{D}$.
79. (507) Алгоритм $\mathcal{A}$ решает задачу $\mathfrak{T} : \mathfrak{I} \rightarrow \mathfrak{D}$, если $\mathcal{A}$ и $\mathfrak{T}$ определены для одинаковых множеств входных и выходных данных, и $\mathcal{A}$ завершается на любом входе и всегда вычисляет правильный ответ к задаче $\mathfrak{T}$.
80. (507) Массовая задача (алгоритмически) разрешима, если существует алгоритм, решающий эту задачу, и неразрешима, если такого алгоритма не существует.
81. (508) Задача распознавания - это массовая задача с множеством ответов $\{\text{да}, \text{нет}\}$.
82. (508) Задача $\mathfrak{T}_1 : \mathfrak{I}_1 \rightarrow \{1, 0\}$ m -сводится (или m -сводима) к задаче $\mathfrak{T}_2 : \mathfrak{I}_2 \rightarrow \{1, 0\}$, если 1) существует алгоритм $\mathcal{A}$, такой что $\mathcal{A} : \mathfrak{I}_1 \rightarrow \mathfrak{I}_2$ - всюду определённое отображение и 2) для любого входа i задачи $\mathfrak{T}_1$ верно $\mathfrak{T}_1(i) = \mathfrak{T}_2(\mathcal{A}(i))$.
83. (509) Теорема об m -сводимости. Если задача $\mathfrak{T}_1$ m -сводится к разрешимой задаче $\mathfrak{T}_2$, то задача $\mathfrak{T}_1$ также разрешима.
Следствие. Если неразрешимая задача $\mathfrak{T}_1$ m -сводится к задаче $\mathfrak{T}_2$, то задача $\mathfrak{T}_2$ также неразрешима.
84. (513) Проблема останова МТ (Halt).
Входы: МТ M , ленточное слово w
 $\text{Halt}(M, w) = \mathfrak{t} \Leftrightarrow$ вычисление M на w конечно
85. (513) Проблема распознавания (LogProg)
Входы: конечная сигнатура σ логики предикатов, ХЛП $\mathcal{P}$ и основной запрос $\mathcal{Q}$ этой сигнатуры
 $\text{LogProg}(\sigma, \mathcal{P}, \mathcal{Q}) = \mathfrak{t} \Leftrightarrow \mathcal{Q} \rightarrow_{\mathcal{P}}^* \square$.
86. (515) Проблема общезначимости формул ЛП (Valid)
Вход: конечная сигнатура σ и формула ЛП φ этой сигнатуры
 $\text{Valid}(\sigma, \varphi) = \mathfrak{t} \Leftrightarrow \models \varphi$
87. (513-517) Утверждения о проблемах Halt, LogProg и Valid. Теорема Чёрча.
1. Утверждение. Известно, что проблема Halt алгоритмически неразрешима.
 2. Утверждение. Проблема Halt m -сводима к проблеме LogProg.
 3. Следствие. Проблема LogProg алгоритмически неразрешима.
 4. Утверждение. Проблема LogProg m -сводима к проблеме Valid.
 5. Теорема Чёрча. Проблема общезначимости формул логики предикатов (Valid) алгоритмически неразрешима.
- 88.
-
89. (588) Модальные логики. Семантика Крипке
Модель Крипке над переменными Var - это система $(W, \mapsto, L)$, где
1. W - непустое множество миров
 2. $\mapsto \subseteq W \times W$ - отношение переходов между мирами (w' называется w -альтернативой для w , если $w \mapsto w'$)

3. $L : W \rightarrow 2^{\text{Var}}$ - оценка переменных для каждого мира ($x \in L(w)$ - переменная x истинна в мире w)

Шкала Крипке - это пара $(W, \mapsto)$.

Пусть $\mathcal{F}$ - шкала Крипке, $\mathcal{I}$ - модель Крипке, φ, ψ - формулы модальной логики. Тогда

4. Формула φ истинна в модели $\mathcal{I}$ ($\mathcal{I} \models \varphi$), если для любого мира w модели $\mathcal{I}$ верно $\mathcal{I}, w \models \varphi$.
5. Формула φ истинна на шкале $\mathcal{F}$ ($\mathcal{F} \models \varphi$), если для любой модели Крипке $\mathcal{I}$, основанной на $\mathcal{F}$, верно $\mathcal{I} \models \varphi$.
6. Формула φ общезначима ($\models \varphi$), если для любой шкалы $\mathcal{F}$ верно $\mathcal{F} \models \varphi$.
7. Формулы φ и ψ равносильны ($\varphi \sim \psi$), если $\models \varphi \leftrightarrow \psi$.

90. (597-598) Законы модальных логик. Для любых формул φ, ψ верно

1. $\Box\varphi \sim \neg\Diamond\neg\varphi$
2. Если $\models \varphi$, то $\models \Box\varphi$
3. $\models \Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Box\psi)$

91. (600) Эпистемическая логика (логика знаний, "я знаю"/"я допускаю")

1. $\Box\varphi \rightarrow \varphi$ (мои знания верны, закон адекватности знания)
2. $\Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$ (мне известно, что именно я знаю, закон позитивной интроспекции)
3. $\neg\Box\varphi \rightarrow \Box\neg\Box\varphi$ (мне известно, что именно я не знаю, закон негативной интроспекции)

92. (602-604) Следствия законов эпистемической логики. Для любой шкалы Крипке

$\mathcal{F} = (W, \mapsto)$ и любой формулы φ верно:

1. $\mathcal{F} \models \Box\varphi \rightarrow \varphi \Leftrightarrow$ отношение $\mapsto$ рефлексивно
2. $\mathcal{F} \models \Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi \Leftrightarrow$ отношение $\mapsto$ транзитивно
3. $\mathcal{F} \models \neg\Box\varphi \rightarrow \Box\neg\Box\varphi \Leftrightarrow$ отношение $\mapsto$ симметрично

93. (605) Следствие. Модель Крипке идеального познающего субъекта - это модель, отношение переходов которой является отношением эквивалентности.

94. (609) Темпоральная логика (логика времени, "всегда/иногда").

LTL - логика линейного времени.

1. Время дискретно линейно течёт вперёд
2. Формула - это свойство линейного развития событий
CTL - логика деревьев вычислений
3. Время - это частично упорядоченное множество, которым описываются все варианты развития событий
4. Формула - это высказывание о возможности и невозможности заданного развития событий с учётом всех вариантов

95. (612) Логика линейного времени (LTL). В LTL модальности $\Box$ и $\Diamond$ обозначаются **G** (от "Globally") и **F** (от "in Future") соответственно.

96. (616) Логика деревьев вычислений (CTL). Модальности в CTL.

1. **AG** (от "for All paths G") (это $\Box$ модальность).
2. **EF** (от "Exists path such that F") (это $\Diamond$ модальность)

3. **EG** (от "Exists path such that G"). $\mathcal{I}, v \models \mathbf{EG}\varphi \Leftrightarrow$ существует ветвь дерева, исходящая из v и такая что для каждой вершины w этой ветви верно $\mathcal{I}, w \models \varphi$.
4. **AF** (от "for All paths F"). $\mathcal{I}, v \models \mathbf{AF}\varphi \Leftrightarrow$ для каждой ветви дерева, исходящей из v существует вершина w , такая что $\mathcal{I}, w \models \varphi$.

97. (623) Интуиционистская логика. Семантика Колмогорова-Брауэра-Гейтинга.

Интуиционистская шкала Крипке - это пара $(W, \preceq)$, где $\preceq$ - отношение нестрогого частичного порядка: оно

1. рефлексивно,
2. транзитивно,
3. антисимметрично ($\forall w_1, w_2 : w_1 \preceq w_2, w_2 \preceq w_1 \implies w_1 = w_2$)

Интуиционистская интерпретация - это модель Крипке $(W, \preceq, L)$, для которой

4. $(W, \preceq)$ - интуиционистская шкала Крипке,
5. оценка L монотонна: для любых миров w_1, w_2 и любой переменной x верно $x \in L(w_1), w_1 \preceq w_2 \implies x \in L(w_2)$.

98. (630) Интуиционистское отношение выполнимости.

$\mathcal{I}, w \models_i x, x \in \text{Var} \Leftrightarrow x \in L(w)$

$\mathcal{I}, w \models_i \varphi \& \psi \Leftrightarrow \mathcal{I}, w \models_i \varphi$ и $\mathcal{I}, w \models_i \psi$

$\mathcal{I}, w \models_i \varphi \vee \psi \Leftrightarrow \mathcal{I}, w \models_i \varphi$ или $\mathcal{I}, w \models_i \psi$

$\mathcal{I}, w \models_i \varphi \& \psi \Leftrightarrow \mathcal{I}, w \models_i \varphi$ и $\mathcal{I}, w \models_i \psi$

$\mathcal{I}, w \models_i \neg\varphi \Leftrightarrow \forall w' : w \preceq w'$ верно $\mathcal{I}, w' \not\models_i \varphi$

$\mathcal{I}, w \models_i \varphi \rightarrow \psi \Leftrightarrow \forall w' : w \preceq w'$ и $\mathcal{I}, w' \models_i \varphi$ верно $\mathcal{I}, w' \models_i \psi$

Формула φ интуиционистски общезначима ($\models_i \varphi$), если для любой интуиционистской интерпретации $\mathcal{I}$ и любого её мира w верно $\mathcal{I}, w \models_i \varphi$.

99. (631) Свойства интуиционистской логики.

Для любых переменных x, y верно:

1. ~~$\models_i x \vee \neg x$~~
2. ~~$\models_i \neg\neg x \rightarrow x$~~
3. ~~$\models_i \neg(x \& y) \rightarrow (\neg x \vee \neg y)$~~
4. ~~$\models_i \neg(x \vee y) \rightarrow (\neg x \& \neg y)$~~
5. $\models_i x \rightarrow \neg\neg x$
6. $\models_i \neg\neg\neg x \rightarrow \neg x$
7. $\models_i (\neg x \vee \neg y) \rightarrow \neg(x \& y)$
8. $\models_i \neg x \vee \neg\neg x$

100. (634) Утверждения о формулах интуиционистской логики.

1. Для любых формулы φ , интуиционистской интерпретации $I = (W, \preceq, L)$ и миров w_1, w_2 верно $\mathcal{I}, w_1 \models_i \varphi$ и $w_1 \preceq w_2 \implies \mathcal{I}, w_2 \models_i \varphi$.
2. Для любой формулы φ , такой что $\models_i \varphi$, верно и $\models \varphi$ в логике высказываний.
3. Для любых формул φ и ψ верно $\models_i \varphi \vee \psi \implies \models_i \varphi$ или $\models_i \psi$.

101. (652) Задача верификации программ.

Тройка Хоара - это запись вида $\{\varphi\}\pi\{\psi\}$. φ - формула логики предикатов, называемая

предусловием, π - программа, ψ - формула логики предикатов, называемая постусловием. Триплет $\{\varphi\}\pi\{\psi\}$ истинен в интерпретации $\mathcal{I}$ ($\mathcal{I} \models \{\varphi\}\pi\{\psi\}$), если для любых состояний данных σ, σ' верно следующее: если $\mathcal{I} \models \varphi\sigma$ и значение $\sigma' = \mathcal{I}[\pi](\sigma)$ определено, то $\mathcal{I} \models \psi\sigma'$.

Программа π частично корректна в интерпретации $\mathcal{I}$ относительно предусловия φ и постусловия ψ , если $\mathcal{I} \models \{\varphi\}\pi\{\psi\}$.

102. (654) Логика Хоара. Лемма о корректности правил вывода Хоара. Для любой интерпретации $\mathcal{I}$ и любого из правил $R_\emptyset, R_{:=}, R_{if}, R_{while}, R_{seq}, R_{inf}$ верно следующее: если все под чертой истинно в интерпретации $\mathcal{I}$, то все над чертой тоже истинно в интерпретации $\mathcal{I}$.
103. (658) Теорема о корректности логики Хоара. Если существует успешный вывод триплета $\{\varphi\}\pi\{\psi\}$ в интерпретации $\mathcal{I}$, то $\mathcal{I} \models \{\varphi\}\pi\{\psi\}$.
104. (671) Слабейшим предусловием для программы π и постусловия ψ в интерпретации $\mathcal{I}$ называется формула $wpr(\pi, \psi, \mathcal{I})$, такая что
 1. $\mathcal{I} \models \{wpr(\pi, \psi, \mathcal{I})\}\pi\psi$ и
 2. для любой формулы φ , такой что $\mathcal{I} \models \{\varphi\}\pi\{\psi\}$, верно соотношение $\mathcal{I} \models \varphi \rightarrow wpr(\pi, \psi, \mathcal{I})$.
105. (671) Теорема. $\mathcal{I} \models \{\varphi\}\pi\{\psi\} \Leftrightarrow \mathcal{I} \models \{wpr(\pi, \psi, \mathcal{I})\}\pi\psi$ и $\mathcal{I} \models \varphi \rightarrow wpr(\pi, \psi, \mathcal{I})$.
106. (672) Теорема о слабейшем предусловии.
 1. $wpr(\emptyset, \psi, \mathcal{I}) = \psi$
 2. $wpr(x := t; , \psi, \mathcal{I}) = \psi\{x/t\}$, если подстановка $\{x/t\}$ правильна для ψ
 3. $wpr(\text{if } C \text{ then } \pi_1 \text{ else } \pi_2 \text{ fi}, \psi, \mathcal{I}) = C \& wpr(\pi_1, \psi, \mathcal{I}) \vee \neg C \& wpr(\pi_2, \psi, \mathcal{I})$
 4. $wpr(\pi_1\pi_2, \psi, \mathcal{I}) = wpr(\pi_1, wpr(\pi_2, \psi, \mathcal{I}), \mathcal{I})$
107. (690) Система переходов программы.
 Состояние управления: то, какую часть программы осталось выполнить
 Состояние данных: то, как устроены данные, преобразуемые программой на каждом шаге (например, оценки переменных или запросы)
 Состояние вычисления, включающее в себя состояние данных и состояние управления
 Отношение $\rightarrow_\pi$ шага вычисления программы π
108. (707) CTL*: синтаксис и семантика
 1. Кванторы пути:
 1. $A\varphi$ - для любого бесконечного пути, исходящего из текущего состояния, верно φ
 2. $E\varphi$ - «существует бесконечный путь, исходящий из текущего состояния и такой что для него верно φ »
 2. Темпоральные кванторы:
 1. $F\varphi$ - когда-нибудь, рано или поздно, станет верно φ
 2. $G\varphi$ - всегда будет верно φ
 3. $X\varphi$ - в следующем состоянии будет верно φ (neXt step)
 4. $\varphi U \psi$ - когда-нибудь станет верно ψ , а пока оно не стало верным, обязательно верно φ (Until)

109. (709-711) CTL*. Отношения выполнимости формул для СП $M = (S, S_0, \mapsto, L)$, состояния s и бесконечного пути π задаются следующими правилами:

1. $M, s \models A\varphi \Leftrightarrow$ для любого бесконечного пути π в M , исходящего из s , верно $M, \pi \models \varphi$.
2. $M, s \models E\varphi \Leftrightarrow$ существует бесконечный путь π в M , исходящий из s и такой что $M, \pi \models \varphi$.
3. $M, s \models F\varphi \Leftrightarrow$ существует номер $k, k \geq 1$, такой что $M, \pi^k \models \varphi$
4. $M, s \models G\varphi \Leftrightarrow$ для любого номера $k, k \geq 1$ верно $M, \pi^k \models \varphi$
5. $M, s \models X\varphi \Leftrightarrow M, \pi^2 \models \varphi$
6. $M, s \models \varphi U \psi \Leftrightarrow$ существует номер $k, k \geq 1$, такой что $M, \pi^k \models \psi$ и для любого номера m , такого что $1 \leq m < k$, верно $M, \pi^m \models \varphi$.
, где π^k - суффикс пути π , начинающийся с k -го состояния